www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Cette épreuve se compose de DEUX exercices et d'UN problème

EXERCICE 1

Soit deux réels a et b strictement positifs et la fonction de R^2 dans R définie par :

$$g(x, y) = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Soit $K = \left\{(x, y) \in R^2,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Calculer l'intégrale double $I = \iint_K g(x, y)\, dx\, dy$.

EXERCICE 2

Soit t un réel, n un entier ≥ 2, et la suite de fonctions polynômes $(An)_{n \geq 2}$ définie par :

$$An(t) = nt^{n+1} - (n + 2)t^n + nt + 2 - n$$

1. Vérifier que 1 est racine de An et calculer son ordre de multiplicité.

2. Étudier les variations de An sur R ; on distinguera deux cas.

3. Déterminer le nombre de racines réelles de An et leur ordre de multiplicité.

4. Calculer le polynôme $\frac{An(t)}{t-1}$, puis le quotient $Qn(t)$ de $An(t)$ par $(t - 1)^2$.

5. Calculer $Qn(1)$. Soit $Rn(t) = Qn(t) - nt^{n-1}$.

   Montrer que :

$$\forall\, t \in R^*\ t^{n-2}\, Rn\left(\frac{1}{t}\right) = -\, Rn(t)$$

   et que :

$$Rn(t) = (t - 1) \sum_{p=1}^{p=n-2} p(n - p - 1)\, t^{n-p-2}$$

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME

I

Étude d'une suite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ soit la suite définie par $Un(z) = \dfrac{z^n}{1 + z^{2n}}$.

1. On suppose que $|z| \neq 1$.

   Établir que $|Un(z)| \leq \left(\left||z|^n - |z|^{-n}\right|\right)^{-1}$

   et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} Un(z)$.

2. Étude de $(Un(z))_{n \geq 1}$ pour $|z| = 1$.

   On suppose que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

   a. Si la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L \in \mathbb{C}$, montrer que $|L| = 1$ et $L = Lz$. Conclure.

   b. Déterminer $S = \{\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, Un(z) \text{ est défini}\}$.

   c. On suppose que $\theta \in S$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} Un(z) = L_1 \in \mathbb{C}$.

   Montrer alors que la suite $(\cos n\theta)_{n \geq 1}$ converge vers $L_2 \in \mathbb{R}$.

   En étudiant successivement $\lim\limits_{n \to +\infty} \cos(2n+1)\theta$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin 2n\theta$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin n\theta$ aboutir à une contradiction.

3. On suppose que z est réel.

   La suite de fonctions $(Un)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

II

Étude d'une série.

x étant une variable réelle, on considère encore $Un(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$ et soit $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} Un(x)$. On appelle D l'ensemble de définition de f.

1. Montrer que $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

   Que peut-on dire de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \in D - \{0\}$?

2. Soit $a \in]0, 1[$.

   a. Montrer que la série $\Sigma\, Un$ converge normalement sur $[-a, a]$.

   b. Montrer que f est continue sur D.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur D et que l'on peut dériver terme à terme la série $\Sigma\, Un$ sur D.

4. *a.* Étudier les variations de f sur $]0, +\infty[- \{1\}$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$.

Tournez la page S.V.P.

5. *a.* À l'aide d'un encadrement de $U_n(x)$, montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{x}{2(1-x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{1-x}$$

b. Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$ et déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c. Tracer le graphe de f pour $x \in \mathbb{R}^+$.

6. *a.* Développer en série entière à l'origine la fonction U_n, et préciser le rayon de convergence.

b. Calculer un développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 0.

c. Étudier la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_2^{+\infty} (xf(x) - 1)\,dx \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} (x^2 f(x) - x + \beta)\,dx, \ \beta \in \mathbb{R}.$$

7. Étude pour $0 < a < 1$ de $J = \int_0^a f(x)\,dx$.

a. Montrer que $\forall x \in]0,1[, f(x) \geq x$.

b. Montrer que $\frac{a^2}{2} \leq J \leq -a - \ln(1-a)$.

c. Montrer que $J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_0^{a^n} \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t^2}\,dt$.

d. Justifier l'existence de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n} \operatorname{Arctg}(a^n)$.

e. Établir que $S - J = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{a^n} t^{\frac{1}{n}-1} \operatorname{Arctgt}\,dt$.

f. En déduire que $0 \leq S - J \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n(n+1)}$ et calculer la somme de cette série entière de la variable a.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail